Parcial. Segunda fecha: 30 de juio de 2020

Apellido y nombres:

Nro Padrón:

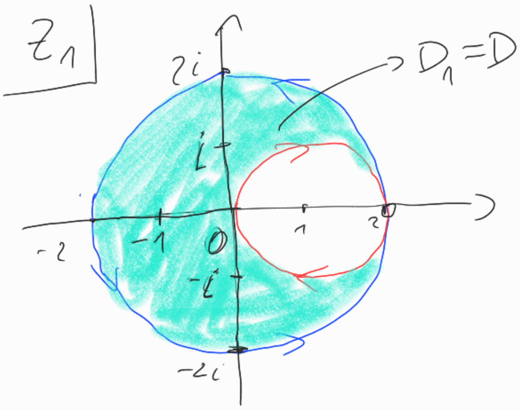
1. Halle una transformación f conforme en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z-1| > 1\}$ tal que $f(D) = \{w \in \mathbb{C} : \alpha_1 < arg(w) < \alpha_2\}$ para algún α_1 y algún α_2. ¿En qué puntos de $\mathbb{C}$ resulta no conforme la transformación hallada?

2. Sea $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z+i)^k}{5^k}$. Determine el conjunto de los z donde f es holomorfa. Calcule
$$\int_C (f(z) + \frac{f(z)}{(z+i)^3} + \bar{z})\, dz$$
siendo C la circunferencia centrada en el origen de radio 2.

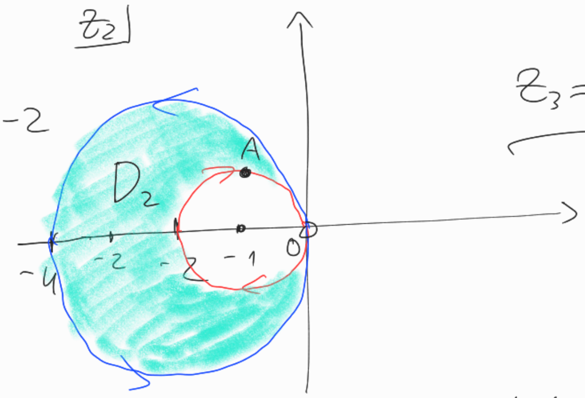
3. Dada la función $f(z) = \frac{\sin(z)}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{z-i}$
   (I) Halle la serie de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\pi)^k$ de f tal que la serie numérica $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$ converja. Obtenga el valor de la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$.
   (II) Halle la serie de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-\pi)^k$ de f tal que la serie numérica $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 5^k$ converja.

4. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar claramente.
   (I) La función $u(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$ es armónica en $\mathbb{C} - \{(1,-1)\}$.
   (II) Si $f = u + iv$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, entonces u^2 es armónica en $\mathbb{R}^2$.
   (III) La función $f(z) = \tan(z)$ tiene infinitos polos simples.
   (IV) Es posible determinar una rama de $g(z) = \sqrt[3]{2z+1}$ de forma tal que g sea continua sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro i-1 y radio 11/10, y que la integral de $\frac{g(z)}{z+1}$ sobre $\mathcal{C}$ sea nula.

$\boxed{1}$



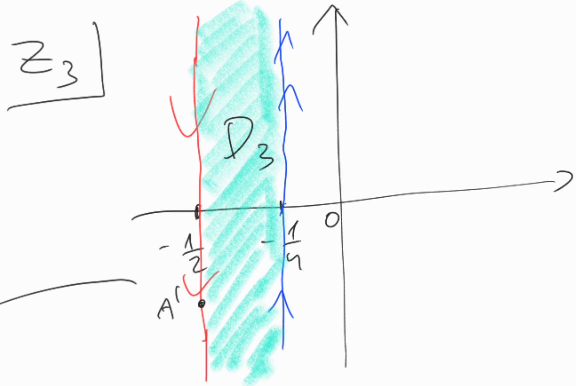
$z_2 = z_1 - 2$ $\longrightarrow$



$z_3 = \dfrac{1}{z_2}$ $\longrightarrow$

ACÁ APLICAMOS LA INVERSIÓN PARA QUE LAS CURVAS SE CONVIERTAN EN RECTAS.

$z_3 = \dfrac{1}{z_2}$ $\longrightarrow$

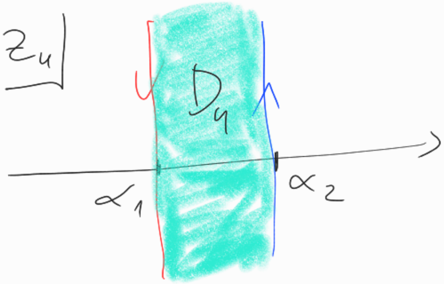


$$A' = \frac{1}{-1+i} = \frac{-1-i}{2}$$

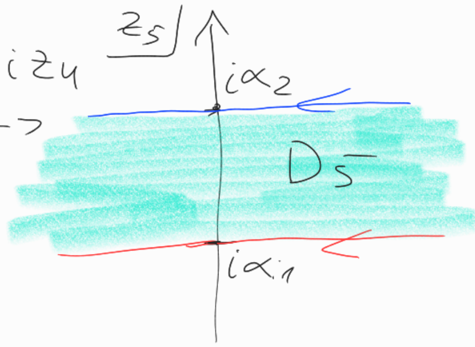
PLANTEAMOS $z_4 = \dfrac{\alpha_2 - \alpha_1}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} \cdot \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) + \alpha_1$.

$$\boxed{z_4 = 2(\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \left(z_3 + \frac{1}{2}\right) + \alpha_1}$$

ENTONCES: $\begin{cases} z_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow z_4 = \alpha_1 \\ z_3 = -\frac{1}{4} \Rightarrow z_4 = \alpha_2 \end{cases}$

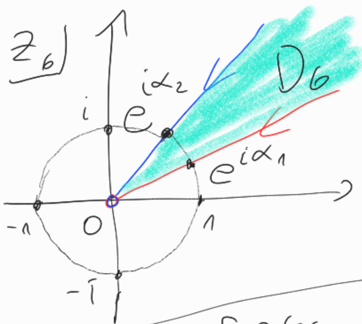


$z_5 = i z_4$ $\longrightarrow$



$\longrightarrow$

$z_6 = e^{z_4}$ $\longrightarrow$



$$T(z_1) = z_6 = e^{i\left[2(\alpha_2 - \alpha_1)\left(\frac{1}{z_1 - 2} + \frac{1}{2}\right) + \alpha_1\right]}$$

$T : \mathbb{C} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ES CONFORME, SALVO EN $z = 2$.

$\boxed{2}$ $$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z+i)^k}{5^k} = \frac{-5}{z+i} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z+i)^k}{5^k}}_{g(z)}$$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{-(z+i)}{5}\right]^k$$ ES HOLOMORFA EN $B: |z+i| < 5$ (SERIE GEOMÉTRICA).

$\boxed{\therefore\ f \text{ ES HOLOMORFA EN } D: 0 < |z+i| < 5.}$

$$\int_C f(z) + \frac{f(z)}{(z+i)^3} + \bar{z}\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C \frac{f(z)}{(z+i)^3}\, dz + \int_C \bar{z}\, dz =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z+i)^3}, -i\right) + \int_C \frac{\overbrace{|z|^2}^{=4}}{z}\, dz =$$

$$= 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, -i) + \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z+i)^3}, -i\right) + 4\right].$$

$$\operatorname{Res}(f, -i) = \operatorname{Res}\left(\frac{-5}{z+i} + g\right) = -5$$

$\hookrightarrow$ HOLOMORFA EN $-i$.

$$\frac{f(z)}{(z+i)^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k} (z+i)^{k-3} \qquad (z = -i \text{ SING. AISLADA})$$

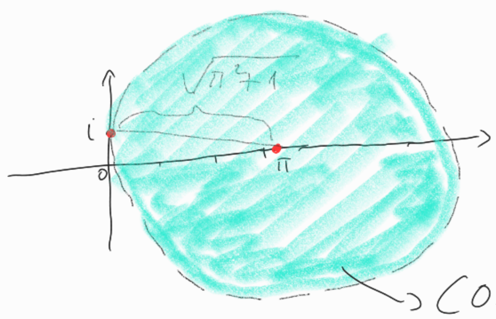
$$(k-3 = -1 \iff k = 2) \Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z+i)^3}, -i\right) = \frac{(-1)^2}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$\therefore \boxed{\int_C f(z) + \frac{f(z)}{(z+i)^3} + \bar{z}\, dz = 2\pi i \left(-5 + \frac{1}{25} + 4\right) = \frac{-48}{25}\pi i}$$

//.

$\boxed{3}$ $$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z-\pi)^2} + \frac{1}{z-i}$$ $\rightarrow$ SINGULARIDADES AISLADAS $z = \pi$, $z = i$.

(I)



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{(z-\pi)}_{1}{}^k$$

$z = \pi + 1$

CONV. ABSOLUTA EN $0 < |z - \pi| < \overbrace{\sqrt{\pi^2+1}}^{|\pi - i|}$.

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-\pi+\pi-i}=\frac{1}{\pi-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-\pi}{\pi-i}}=\frac{1}{\pi-i}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(z-\pi)^n}{(\pi-i)^n}=$$

$$0<\left|\frac{z-\pi}{\pi-i}\right|<1$$

$$=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(z-\pi)^n}{(\pi-i)^{n+1}}$$

$$\frac{\sin(z)}{(z-\pi)^2}=\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2}=\sum_{k\geq 0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!\,(z-\pi)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!}=\frac{1}{(z-\pi)}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

$$\therefore f(z)=\frac{1}{z-\pi}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-\pi)^n}{(\pi-i)^{n+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(z-\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{z-\pi}+\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(z-\pi)^{2k}}{(\pi-i)^{2k+1}}}_{(n=2k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\underbrace{\frac{-1}{(\pi-i)^{2k}}}_{(n=2k-1)}+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right](z-\pi)^{2k-1}}$$

II) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-\pi)^n$ $\quad 5^n$

$z-\pi=5 \iff z=5+\pi \implies$ HALLAMOS LA SERIE QUE CONVERGE EN $5+\pi$. PERO $|5+\pi-\pi|=5>\sqrt{\pi^2+1}$.

$\implies$ HALLAMOS LA SERIE QUE CONVERGE EN

$|z-\pi|>\sqrt{\pi^2+1}=|\pi-i|$.

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-\pi+\pi-i}=\frac{1}{z-\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi-i}{z-\pi}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\pi-i)^n}{(z-\pi)^{n+1}}$$

$$\left|\frac{\pi-i}{z-\pi}\right|<1$$

$\therefore$ SI $|z-\pi| > \sqrt{\pi^2+1}$, ENTONCES

$$f(z) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{(\pi-i)^{m-1}}{(z-\pi)^m}$$

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-\pi)^{2k-1}}{(2k+1)!} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (\pi-i)^{m-1}}{(z-\pi)^m}}$$

///.

$\boxed{4}$ (I) $U \in C^1(\mathbb{C} \setminus (1,-1))$

$$U(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+(y+1)^2} = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{x-1+i(y+1)}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy+(-1+i)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z-1+i}\right), \text{ SI } z = x+iy = (x,y).$$

$\therefore$ COMO $f(z) = \dfrac{1}{z-(1-i)}$ ES HOLOMORFA

EN $\mathbb{C} \setminus \{1-i\} = \mathbb{C} \setminus \{(1,-1)\}$, $U = \operatorname{Re}(f)$ ES

ARMÓNICA EN $\mathbb{C} \setminus \{(1,-1)\}$.

RTA.: $\boxed{\text{VERDADERA}}$

(II) $f(z) = z = \underset{U}{x} + iy$ ES ENTERA PERO

$U^2 = x^2$ NO ES ARMÓNICA EN $\mathbb{C}$,

YA QUE $\nabla U^2 = 2 \neq 0$.

$\therefore$ RTA.: $\boxed{\text{FALSO}}$

(III) $f(z) = tg(z) = \frac{sen(z)}{cos(z)}$

SINGULARIDADES: $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ → SON LOS CEROS DE cos

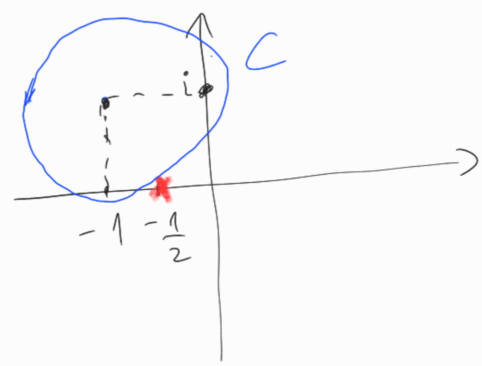
$(\forall k \in \mathbb{Z})$ z_k ES CERO SIMPLE DE cos,

YA QUE $cos'(z_k) = -sen(z_k) = (-1)^k = 0$.

$\Rightarrow$ <u>z_k ES POLO SIMPLE DE f.</u>

<u>RTA.:</u> $\boxed{\text{VERDADERO.}}$

(IV) $g(z) = \sqrt[3]{2z+1}$ ⇝ PUNTO DE RAMIFICACIÓN $z = -\frac{1}{2}$.



$\left| i - 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left| -\frac{1}{2} + i \right| =$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{10} > \frac{11}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ EL PUNTO DE RAMIFICACIÓN ES EXTERIOR A C.

TOMAMOS CUALQUIER RAMA DE $\sqrt[3]{z}$ DE MANERA QUE EL CORTE DE g (QUE RESULTA UNA SEMI_RRECTA) (POR SER $2z+1$ UNA TRANSFORMACIÓN AFÍN) DE MANERA QUE NO CORTE A C Y g SEA CONTINUA EN C (Y HOLOMORFA EN EL INTERIOR DE C).

USANDO LA FÓRMULA DE CAUCHY (ADAPTADA A ESTE CASO) PODEMOS ESCRIBIR, YA QUE $z=-1$ ES INTERIOR A C:

$$\int_C \frac{g(z)}{z+1}\,dz = 2\pi i\, g(-1) = 2\pi i \sqrt{-1} \neq 0$$

$\therefore$ <u>RTA.:</u> $\boxed{\text{FALSO}}$